

私立対策（抑えておきたい整数系問題）

-
- [1] $xy = (x+2)^2$ をみたす自然数の組 (x, y) をすべて求めよ。
- [2] m, n は 3 桁の自然数であり、 $2019 + m^2 = n^2$ を満たしている。 m, n の値をそれぞれ求めよ。
- [3] $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{7}$ を満たす自然数 m, n ($m < n$) を求めよ。
- [4] 2697 を素因数分解すると $a \times b \times c$ となる。ただし、 a, b, c は素数で $a < b < c$ を満たす。このとき、 a, b を求めよ。

1) $xy = (x+2)^2$ をみたす自然数の組 (x, y) をすべて求めよ。

$$\text{□ } xy = x^2 + 4x + 4 \quad \leftarrow \begin{array}{l} 4 \\ \sim \end{array} \text{ がほんから 展開した。}$$

$$xy - x^2 - 4x = 4$$

$$x(y - x - 4) = 4$$

2) x は自然数なので
右辺の 4 の約数となる。
 $x = 1, 2, 4$ の 3通り

3) (i) $x = 1$ のとき
 $y - 1 - 4 = 4$
 $y = 9$
 $(x, y) = (1, 9)$

$$(ii) \quad x = 2 \text{ のとき}$$

$$y - 2 - 4 = 2$$

$$y = 8$$

$$(x, y) = (2, 8)$$

$$(iii) \quad x = 4 \text{ のとき}$$

$$y - 2 - 4 = 1$$

$$y = 9$$

$$(x, y) = (4, 9)$$

以上より

$$\begin{aligned} (x, y) &= (1, 9) \\ &\quad (2, 8) \\ &\quad (4, 9) \end{aligned}$$



文字式 = 敏
(積)

の形にすると
何が見える!

1 $xy = (x+2)^2$ をみたす自然数の組 (x, y) をすべて求めよ。

x	(x, y)	
1	$1 \times 9 = 3^2$	(1, 9) ○
2	$2 \times 8 = 16$	(2, 8) ○
3	$3 \times 25 = 25$	(3, $\frac{25}{3}$) X
4	$4 \times 9 = 36$	(4, 9) ○
5	$5 \times 9 = 49$	X
6	$6 \times 9 = 64$	X
7	$7 \times 9 = 81$	X
8	$8 \times 9 = 100$	X
9	$9 \times 9 = 121$	X
10	$10 \times 9 = 144$	X

?

$x=10$ より先は
絶対、 y は自然数に
ならぬと示せますか？



$x=1$ から順に y はめる
どうなるのか。

1 $xy = (x+2)^2$ をみたす自然数の組 (x, y) をすべて求めよ。

?

$x = 10$ より先は
絶対、 y は自然数に
ならないと示せますか？

$\frac{4}{x}$ は x が 5 以上で

必ず「分子」にならざる

y は自然数にはなりません。

$$\begin{aligned}y &= \frac{(x+2)^2}{x} \\&= \frac{x^2 + 4x + 4}{x} \\&= x + 4 + \frac{4}{x}\end{aligned}$$

自然数 $\frac{4}{x}$ 以上で 分子

□

[2] m, n は 3 桁の自然数であり、 $2019 + m^2 = n^2$ を満たしている。 m, n の値をそれぞれ求めよ。

$$2019 = n^2 - m^2$$

$$2019 = (n+m)(n-m)$$

$$3 \times 673 = (n+m)(n-m)$$

$$\begin{cases} n+m = 673 \\ n-m = 3 \end{cases}$$

$$(m, n) = (335, 338)$$

?

673 は $a \times b$ のように
分けられる可能性は？

① 各位の数の和

$2+0+1+9 = 12 \rightarrow 12$ は 3 の倍数なので
 $2019 \neq 3$ の倍数。

② $2019 = 3 \times 673$



素因数分解で

数の積に表し、
文字の候補をほりま！

② m, n は 3 桁の自然数であり、 $2019 + m^2 = n^2$ を満たしている。 m, n の値をそれぞれ求めよ。

?

673 は $a \times b$ のように
分けられる可能性は？

$$3 \times 673 = (n+m)(n-m)$$

$$\begin{cases} n+m = 673 \\ n-m = 3 \end{cases}$$

$$(m, n) = (335, 338)$$

※ 分けられると、角平が増える

△ 673 は 素数 なのか。

$$\sqrt{25^2} < \sqrt{673} < \sqrt{26^2}$$

||
25 26

25 以下の 素数 は

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

× × × × × × × ×

どうも 673 を 割り切るこだわ

げきないのでは 673 は 素数
である。

よって 角平は この 1つで 1+ !

3 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{7}$ を満たす自然数 m, n ($m < n$) を求めよ。

~~~~~ ~~~

両辺  $\times 7mn$

$$7n + 7m = mn$$

$$mn - 7n - 7m = 0$$

$$(m-7)(n-7) = 49$$

$$\text{(iii)} \quad \left\{ \begin{array}{l} m-7 = 1 \\ n-7 = 49 \end{array} \right. \quad (m, n) = (8, 56) \quad //$$

$$\text{(iv)} \quad \left\{ \begin{array}{l} m-7 = -49 \\ n-7 = -1 \end{array} \right. \quad \times$$

$$\text{(ii)} \quad \left\{ \begin{array}{l} m-7 = 49 \\ n-7 = 1 \end{array} \right. \quad \times$$

$$\text{(v)} \quad \left\{ \begin{array}{l} m-7 = -7 \\ n-7 = -7 \end{array} \right. \quad \times$$

$$\text{(vi)} \quad \left\{ \begin{array}{l} m-7 = 7 \\ n-7 = 7 \end{array} \right. \quad \times$$

$$\text{(vii)} \quad \left\{ \begin{array}{l} m-7 = -1 \\ n-7 = -49 \end{array} \right. \quad \times$$

$49 = 7^2$  より 正で 3通り 負も なれど 6通り の場合分け。

④ 2697 を素因数分解すると  $a \times b \times c$  となる。ただし、 $a, b, c$  は素数で  $a < b < c$  を満たす。このとき、 $a, b$  を求めよ。

□ 各位の数の和は、 $2 + 6 + 9 + 7 = \underbrace{24}_{\text{24}}$

$\underbrace{24}_{\text{24}}$  は 3 で割り切れるので 2697 は 3 の倍数

□  $2697 = 3 \times 899$

$$= 3 \times (900 - 1)$$

$$= 3 \times (30^2 - 1^2)$$

$$= 3 \times (30+1)(30-1)$$

$$= 3 \times 29 \times 31$$

$a = 3, b = 29, c = 31$



Point

○ 素数判定法

○ 素因数分解

$$\square < \sqrt{\quad} < \square \quad (2\text{乗}) - (2\text{乗})$$

$$\square \text{以下の素数で} \quad = (\square + \Delta)(\square - \Delta) \\ \text{割り3}.$$